与“小数部分函数”有关的三个积分

茶凉凉凉凉、

始作于 2026 年 10 月 10 日

一、引言

Cornel Ioan Vălean 的 *(Almost) Impossible Integrals, Sums, and Series* 记录了如下三个有趣问题[1]：

对正整数 $p \geqslant q \geqslant 1$ 的定积分

$$\int_0^1 x^p \left\{\frac{1}{x}\right\}^q \mathrm{d}x,$$

二次幂的三重积分[2]

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(\left\{\frac{x}{y}\right\}\left\{\frac{y}{z}\right\}\left\{\frac{z}{x}\right\}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

以及对 n（自然数）次幂三重积分

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(\left\{\frac{x}{y}\right\}\left\{\frac{y}{z}\right\}\left\{\frac{z}{x}\right\}\right)^n \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

其中 $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$ 表示 x 的小数部分，而 $\lfloor\cdot\rfloor$ 是“向下取整”.

三个问题由浅入深：第一个积分的递推技巧是第二、三个积分的基础；最后一个积分在 $n=2$ 时恰好给出第二个积分的结果，可以相互印证.

如下是基于该书整理的一份笔记.

此外，在下文中我们还会遇到 Riemann zeta 函数：$\zeta(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-s}$，读者需提前了解一下.

二、$\displaystyle\int_0^1 x^p \left\{\frac{1}{x}\right\}^q \mathrm{d}x$

先作代换 $x = \dfrac{1}{y}$（$\mathrm{d}x = -y^{-2}\,\mathrm{d}y$），把 x 从 0 到 1 的积分变成 y 从 ∞ 回到 1 的积分，则上式等于

$$\int_1^{\infty} y^{-p-2}\{y\}^q\,\mathrm{d}y = \int_1^{\infty} y^{-p-2}(y-\lfloor y\rfloor)^q\,\mathrm{d}y$$

再按整数区间分割. 注意到，在每个小区间 $[k, k+1)$ 上有 $\lfloor y\rfloor = k$. 记第 k 个小区间上的贡献为

$$I_{p,q,k} \coloneqq \int_k^{k+1} \frac{(y-k)^q}{y^{p+2}}\,\mathrm{d}y, \qquad I_{p,q} = \int_0^1 x^p \left\{\frac{1}{x}\right\}^q \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} I_{p,q,k}. \tag{1}$$

[1] 事实上，核心只有第三个问题，第一个问题实则是“引理”. 为了降低难度，我对 $n=2$ 的情形做了详细了推导，最后一节与之大同小异.

[2] 我曾在五年前提问过该问题，甚至收获了菲尔兹奖得主邓煜的指点（虽然当时并不认识他），而直到最近，我才重新注意到它，并自己得到了解答. 原贴见 https://chaoli.club/index.php/6996

关键的一步是分部积分.

$$\begin{aligned}
I_{p,q,k} &= -\int_k^{k+1} \left(\frac{y^{-p-1}}{p+1}\right)' (y-k)^q \,\mathrm{d}y \\
&= -\frac{y^{-p-1}}{p+1}(y-k)^q\Big|_{y=k}^{y=k+1} + \frac{q}{p+1}\int_k^{k+1} y^{-p-1}(y-k)^{q-1}\,\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{(p+1)(k+1)^{p+1}} + \frac{q}{p+1} I_{p-1,q-1,k}
\end{aligned}$$

稍作变形，有

$$(p+1)I_{p,q,k} = -\frac{1}{(k+1)^{p+1}} + q\, I_{p-1,q-1,k}. \tag{2}$$

递推的起点是

$$I_{0,0,k} = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{1}{k(k+1)}. \tag{3}$$

1.$q=1$ 的情形

$$\begin{aligned}
I_{p,1} &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1} \frac{y-k}{y^{p+2}}\,\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}y}{y^{p+1}} - \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1} \frac{k\,\mathrm{d}y}{y^{p+2}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{p\,y^p}\Big|_{y=k}^{y=k+1}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{k}{(p+1)\,y^{p+1}}\Big|_{y=k}^{y=k+1}\right) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^p} - \frac{1}{(k+1)^p}\right) - \frac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^p} - \frac{k}{(k+1)^{p+1}}\right) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\boxed{\frac{1}{k^p} - \frac{1}{(k+1)^p}}\right) - \frac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\boxed{\frac{1}{k^p} - \frac{1}{(k+1)^p}} + \frac{1}{(k+1)^{p+1}}\right) \\
&= \frac{1}{p(p+1)}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^p} - \frac{1}{(k+1)^p}\right)}_{=1} - \frac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{p+1}} \\
&= \frac{1}{p(p+1)} - \frac{1}{p+1}\left[\zeta(p+1) - 1\right] \\
&= \frac{1}{p} - \frac{\zeta(p+1)}{p+1}
\end{aligned}$$

得到

$$\boxed{I_{p,1} = \int_0^1 x^p \left\{\frac{1}{x}\right\}\mathrm{d}x = \frac{1}{p} - \frac{\zeta(p+1)}{p+1}} \tag{4}$$

2.$p=q$ 的情形

在 (2) 中取 $p=q=i$，得 $(i+1)I_{i,i,k} - i\,I_{i-1,i-1,k} = -\dfrac{1}{(k+1)^{i+1}}$. 对 $i=1,\ldots,n$ 求和，由 (3) 只留下

$$I_{n,n,k} = \frac{1}{k(k+1)(n+1)} - \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^{i+1}}. \tag{5}$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} I_{n,n,k} &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\,(k+1)\,(n+1)} - \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^{i+1}}\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,(k+1)}}_{=1} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^{i+1}}\\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{i+1}} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\left[\zeta\,(i+1)-1\right]\\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\zeta\,(i+1) = 1 - \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\zeta\,(i+1)\end{aligned}$$

因此，

$$\boxed{I_{n,n} = \int_0^1 x^n\left\{\frac{1}{x}\right\}^n \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\zeta(i+1).} \tag{6}$$

3.一般的 $p \geqslant q \geqslant 1$

把 (2) 两边同乘 $\dfrac{p!}{q!}$，

$$\frac{(p+1)!}{q!}\,I_{p,q,k} = -\frac{p!}{q!\,(k+1)^{p+1}} + \frac{p!}{(q-1)!}\,I_{p-1,q-1,k},$$

再作指标代换 $p \mapsto p-q+i+1$、$q \mapsto i+1$（$i = 1, \ldots, q-1$），把它写成便于逐项相消的形式

$$\frac{(p-q+i+2)!}{(i+1)!}\,I_{p-q+i+1,\,i+1,\,k} - \frac{(p-q+i+1)!}{i!}\,I_{p-q+i,\,i,\,k} = -\frac{(p-q+i+1)!}{(i+1)!\,(k+1)^{p-q+i+2}}. \tag{7}$$

对 $i = 1$ 到 $q-1$ 求和，左端相消，只剩 $i = q-1$ 处的 $\dfrac{(p+1)!}{q!}I_{p,q,k}$ 与 $i = 1$ 处的 $(p-q+2)!\,I_{p-q+1,1,k}$：

$$\frac{(p+1)!}{q!}\,I_{p,q,k} = (p-q+2)!\,I_{p-q+1,1,k} - \sum_{i=1}^{q-1}\frac{(p-q+i+1)!}{(i+1)!\,(k+1)^{p-q+i+2}}. \tag{8}$$

再对 k 从 1 到 ∞ 求和，由 (1) 与 (4) 得

$$\frac{(p+1)!}{q!}\,I_{p,q} = \frac{(p-q+2)!}{p-q+1} - (p-q+1)!\,\zeta(p-q+2) - \sum_{i=1}^{q-1}\frac{(p-q+i+1)!}{(i+1)!}\big(\zeta(p-q+i+2)-1\big). \tag{9}$$

现在整理右端. 常数项满足

$$\begin{aligned}\frac{(p-q+2)!}{p-q+1} &= \frac{1\times 2\times\cdots\times(p-q)\,\cancel{(p-q+1)}\,(p-q+2)}{\cancel{p-q+1}}\\ &= (p-q)!\cdot(p-q+2) = (p-q)!\cdot[1+(p-q+1)]\\ &= (p-q)! + (p-q+1)\,(p-q)! = (p-q)! + (p-q+1)!\end{aligned}$$

于是 $(p-q+1)!$ 与右端第二项中的 $-(p-q+1)!\,\zeta(p-q+2)$ 部分结合. 为了将其写成和式通项的形状，利用恒等变形 $-\zeta(\cdot) = -(\zeta(\cdot)-1) - 1$，得

$$\frac{(p+1)!}{q!}\,I_{p,q} = (p-q)! - (p-q+1)!\big(\zeta(p-q+2)-1\big) - \sum_{i=1}^{q-1}\frac{(p-q+i+1)!}{(i+1)!}\big(\zeta(p-q+i+2)-1\big). \tag{10}$$

注意到游离于和式之外的那一项，恰是通项在 $i = 0$ 处的取值：

$$(p-q+1)!\big(\zeta(p-q+2)-1\big) = \frac{(p-q+0+1)!}{(0+1)!}\big(\zeta(p-q+0+2)-1\big),$$

故将求和下限由 $i=1$ 扩大为 $i=0$，该项即被吸收：

$$\frac{(p+1)!}{q!}\,I_{p,q}=(p-q)!-\sum_{i=0}^{q-1}\frac{(p-q+i+1)!}{(i+1)!}\big(\zeta(p-q+i+2)-1\big). \tag{11}$$

最后作指标代换 $i=q-j$，通项变为 $\dfrac{(p-j+1)!}{(q-j+1)!}\big(\zeta(p-j+2)-1\big)$；同时由 $j=q-i$，旧下限 $i=0$ 对应 $j=q$，旧上限 $i=q-1$ 对应 $j=1$，即

$$\sum_{i=0}^{q-1}a_i=\sum_{j=q}^{1}a_{q-j}=\sum_{j=1}^{q}a_{q-j}.$$

于是得到最终的一般公式

$$\boxed{\int_0^1 x^p\left\{\frac{1}{x}\right\}^q\mathrm{d}x=\frac{q!}{(p+1)!}\left((p-q)!-\sum_{j=1}^{q}\frac{(p-j+1)!}{(q-j+1)!}\big(\zeta(p-j+2)-1\big)\right)} \tag{12}$$

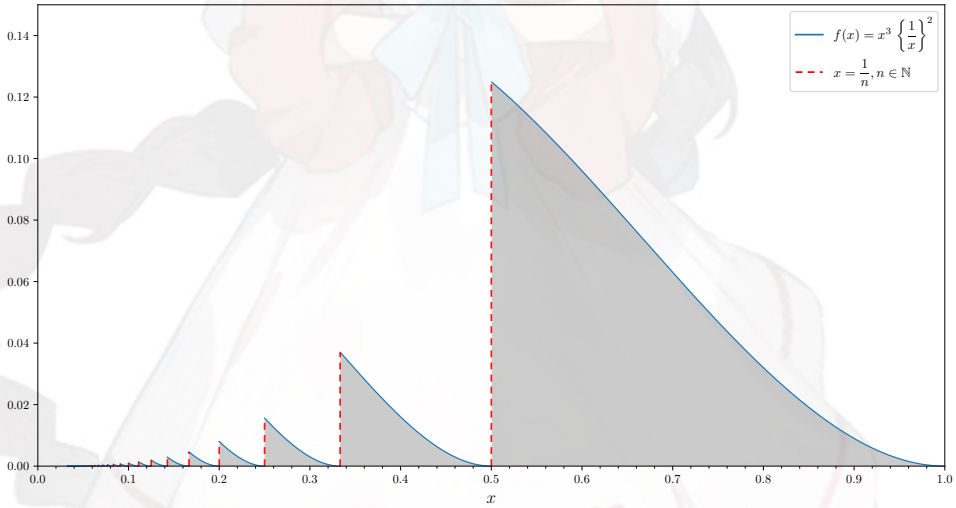


图 1: $f(x)=x^3\left\{\dfrac{1}{x}\right\}^2$ 的图像

三、$\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left(\left\{\frac{x}{y}\right\}\left\{\frac{y}{z}\right\}\left\{\frac{z}{x}\right\}\right)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

记上式为 $\mathscr{I}$. 第一步把三重积分化成双积分. 作代换 $\dfrac{x}{y}=u$（$\mathrm{d}x=y\,\mathrm{d}u$），内层积分上限变为 $\dfrac{1}{y}$；

$$\begin{aligned}\mathscr{I}&=\int_0^1\int_0^1\left[y\int_0^{\frac{1}{y}}\left(\{u\}\left\{\frac{y}{z}\right\}\left\{\frac{z}{uy}\right\}\right)^2\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^1 y\int_0^{\frac{1}{y}}\left[\int_0^1\left(\{u\}\left\{\frac{y}{z}\right\}\left\{\frac{z}{uy}\right\}\right)^2\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

继续作代换 $\dfrac{z}{y}=t$（$\mathrm{d}z=y\,\mathrm{d}t$），

$$\mathscr{I}=\int_0^1 y^2\int_0^{\frac{1}{y}}\left[\int_0^{\frac{1}{y}}\left(\{u\}\left\{\frac{1}{t}\right\}\left\{\frac{t}{u}\right\}\right)^2\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y$$

记

$$\mathscr{I}=\int_0^1 y^2\,G(y)\,\mathrm{d}y,\qquad G(y)\coloneqq\int_0^{\frac1y}\int_0^{\frac1y}\left(\{u\}\left\{\frac1t\right\}\left\{\frac tu\right\}\right)^2\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u. \tag{13}$$

然后用分部积分降幂：

$$\mathscr{I}=\int_0^1\left(\frac{y^3}{3}\right)'G(y)\,\mathrm{d}y=\frac{y^3}{3}\,G(y)\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1\frac{y^3}{3}\,G'(y)\,\mathrm{d}y.$$

上端的边界项 $\dfrac{G(1)}{3}$ 暂且保留；下端的 $\dfrac{y^3}{3}G(y)$ 趋于零. 事实上，由于 $\{x\}\in[0,1)$，被积函数满足 $0\leqslant\left(\{u\}\left\{\dfrac1t\right\}\left\{\dfrac tu\right\}\right)^2<1$，故 $G(y)$ 不超过积分区域的面积：

$$0\leqslant G(y)\leqslant\int_0^{1/y}\int_0^{1/y}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u=\frac{1}{y^2},$$

由夹逼即得 $0\leqslant\dfrac{y^3}{3}G(y)\leqslant\dfrac{y}{3}\to0$.

求 $G'(y)$ 时套用二重变限积分的求导公式：若

$$F(x)=\int_0^{a(x)}\int_0^{b(x)}f(y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\qquad(f\text{ 不显含 }x),$$

则两个积分限各贡献一项，没有其他项：

$$F'(x)=b'(x)\int_0^{a(x)}f\big(b(x),\,z\big)\,\mathrm{d}z+a'(x)\int_0^{b(x)}f\big(y,\,a(x)\big)\,\mathrm{d}y.$$

现在把 $G(y)$ 对号入座：内层变量是 t、上限 $b(y)=\dfrac1y$，外层变量是 u、上限 $a(y)=\dfrac1y$，两者相同且 $a'(y)=b'(y)=-\dfrac{1}{y^2}$. 按公式，

$$\begin{aligned}G'(y)&=-\frac{1}{y^2}\int_0^{1/y}f\Big(\frac1y,\,u\Big)\,\mathrm{d}u-\frac{1}{y^2}\int_0^{1/y}f\Big(t,\,\frac1y\Big)\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{y^2}\int_0^{1/y}\left(\{u\}\{y\}\left\{\frac{1}{uy}\right\}\right)^2\mathrm{d}u-\frac{1}{y^2}\int_0^{1/y}\left(\left\{\frac1y\right\}\left\{\frac1t\right\}\{ty\}\right)^2\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{14}$$

利用 $[0,1)$ 上 $\{u\}=u$、$\{y\}=y$，得到

$$\begin{aligned}\mathscr{I}=&\frac13\int_0^1\int_0^1u^2\left(\left\{\frac1t\right\}\left\{\frac tu\right\}\right)^2\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u+\frac13\int_0^1\int_0^{1/y}y^3\left(\{u\}\left\{\frac{1}{uy}\right\}\right)^2\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y\\&+\frac13\int_0^1\int_0^{1/y}y\left(\{ty\}\left\{\frac1y\right\}\left\{\frac1t\right\}\right)^2\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{15}$$

把后两个积分也化成与第一个相同的形状. 第二个积分作代换 $uy=w$ （$\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}w}{y}$，$u\in(0,\dfrac1y)$ 对应 $w\in(0,1)$）：

$$\int_0^1\int_0^{1/y}y^3\left(\{u\}\left\{\frac{1}{uy}\right\}\right)^2\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^1y^2\left(\left\{\frac wy\right\}\left\{\frac1w\right\}\right)^2\mathrm{d}w\,\mathrm{d}y;$$

第三个积分作代换 $ty=z$：

$$\int_0^1\int_0^{1/y}y\left(\{ty\}\left\{\frac1y\right\}\left\{\frac1t\right\}\right)^2\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^1z^2\left(\left\{\frac1y\right\}\left\{\frac yz\right\}\right)^2\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y.$$

把上面两式代回 (15)，交换积分次序并统一改记哑变量为 (t,u)：第二个积分换序后把 w 记作 t、y 记作 u，第三个换序后把 y 记作 t、z 记作 u，都与第一个积分相同. 三个 $\dfrac13$ 相加为 1，于是

$$\mathscr{I}=\int_0^1\int_0^1u^2\left(\left\{\frac1t\right\}\left\{\frac tu\right\}\right)^2\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t. \tag{16}$$

第四步按 $u \lessgtr t$[3] 把积分区域沿对角线拆成两个三角形：

$$\begin{aligned}\mathscr{I} &= \int_0^1\!\int_0^t u^2\Big\{\frac{1}{t}\Big\}^2\Big\{\frac{t}{u}\Big\}^2 \mathrm{d}u\,\mathrm{d}t + \int_0^1\!\int_t^1 u^2\Big\{\frac{1}{t}\Big\}^2\Big\{\frac{t}{u}\Big\}^2 \mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1\!\int_0^t u^2\Big\{\frac{1}{t}\Big\}^2\Big\{\frac{t}{u}\Big\}^2 \mathrm{d}u\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-t)\,t^2\Big\{\frac{1}{t}\Big\}^2 \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

第二个积分中 $\dfrac{t}{u} \leqslant 1$，故 $\{t/u\} = t/u$，被积函数化成 $t^2\{1/t\}^2$，对 u 积分得因子 $1-t$，它就是 $I_{2,2} - I_{3,2}$.

第一个积分作代换 $u = ts$（$\mathrm{d}u = t\,\mathrm{d}s$，$s \in (0,1)$，此时 $\dfrac{t}{u} = \dfrac{1}{s}$）：

$$\int_0^1\!\int_0^t u^2\Big\{\frac{1}{t}\Big\}^2\Big\{\frac{t}{u}\Big\}^2 \mathrm{d}u\,\mathrm{d}t = \int_0^1\!\int_0^1 t^3\Big\{\frac{1}{t}\Big\}^2 s^2\Big\{\frac{1}{s}\Big\}^2 \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

代换后区域成为矩形 $[0,1]^2$，且被积函数分解为只含 t 与只含 s 的两部分之积，故二重积分因式分解为

$$= \int_0^1 t^3\Big\{\frac{1}{t}\Big\}^2 \mathrm{d}t \cdot \int_0^1 s^2\Big\{\frac{1}{s}\Big\}^2 \mathrm{d}s = I_{3,2}\,I_{2,2}.$$

于是

$$\mathscr{I} = I_{3,2}\,I_{2,2} + I_{2,2} - I_{3,2}. \tag{17}$$

由上一节的公式算出：

$$I_{2,2} = 1 - \frac{1}{3}\big(\zeta(2)+\zeta(3)\big), \qquad I_{3,2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\big(2\zeta(3)+3\zeta(4)\big).$$

并对“偶偶乘积”使用 Euler 的经典恒等式[4]

$$\zeta(2)\zeta(4) = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{\pi^4}{90} = \frac{945}{540}\,\zeta(6) = \frac{7}{4}\,\zeta(6),$$

最终得到

$$\boxed{\begin{aligned}\mathscr{I} = 1 &- \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{2}\zeta(3) + \frac{7}{48}\zeta(6) + \frac{1}{18}\zeta(2)\zeta(3) \\ &+ \frac{1}{18}\zeta^2(3) + \frac{1}{12}\zeta(3)\zeta(4).\end{aligned}} \tag{18}$$

至此，二次幂的情形就完全解决了.

四、$\displaystyle\int_0^1\!\int_0^1\!\int_0^1 \Big(\Big\{\frac{x}{y}\Big\}\Big\{\frac{y}{z}\Big\}\Big\{\frac{z}{x}\Big\}\Big)^n \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

记上式为 $\mathscr{I}_n$. 回过头看，上一节的推导中其实没有一处真正用到指数 2，因此我们可以把它换成 n，逐字照抄上一节的流程.

把三重积分化成双积分：

$$\mathscr{I}_n = \int_0^1 y^2\,G_n(y)\,\mathrm{d}y, \qquad G_n(y) \coloneqq \int_0^{\frac{1}{y}}\!\int_0^{\frac{1}{y}} \Big(\{u\}\Big\{\frac{1}{t}\Big\}\Big\{\frac{t}{u}\Big\}\Big)^n \mathrm{d}t\,\mathrm{d}u.$$

[3] 符号 $\lessgtr$ 读作“小于或大于”；这里用它把 $u < t$ 与 $u > t$ 两种情形合在一处书写，实际计算时分别处理.

[4] $\zeta(2k) = \dfrac{|B_{2k}|\,(2\pi)^{2k}}{2\,(2k)!}$（$B_{2k}$ 为 Bernoulli 数）立得：对任意正整数 k, m，

$$\zeta(2k)\,\zeta(2m) = \frac{1}{2}\binom{2k+2m}{2k}\frac{|B_{2k}|\,|B_{2m}|}{|B_{2k+2m}|}\,\zeta(2k+2m).$$

分部积分降幂：

$$\mathscr{I}_n=\int_0^1\Big(\frac{y^3}{3}\Big)'G_n(y)\,\mathrm{d}y=\frac{y^3}{3}\,G_n(y)\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1\frac{y^3}{3}\,G_n'(y)\,\mathrm{d}y.$$

上端的边界项 $\dfrac{G_n(1)}{3}$ 暂且保留；夹逼得 $0\leqslant\dfrac{y^3}{3}G_n(y)\leqslant\dfrac{y}{3}\to0$.

$G_n'(y)$ 照旧套用二重变限积分的求导公式：

$$G_n'(y)=-\frac{1}{y^2}\int_0^{1/y}\Big(\{u\}\{y\}\Big\{\frac{1}{uy}\Big\}\Big)^n\,\mathrm{d}u-\frac{1}{y^2}\int_0^{1/y}\Big(\Big\{\frac{1}{y}\Big\}\Big\{\frac{1}{t}\Big\}\{ty\}\Big)^n\,\mathrm{d}t.$$

代回并利用 $[0,1)$ 上 $\{u\}=u$、$\{y\}=y$，得

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_n=\frac{G_n(1)}{3}&+\frac{1}{3}\int_0^1\int_0^{1/y}y^{n+1}\Big(\{u\}\Big\{\frac{1}{uy}\Big\}\Big)^n\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y\\&+\frac{1}{3}\int_0^1\int_0^{1/y}y\Big(\Big\{\frac{1}{y}\Big\}\Big\{\frac{1}{t}\Big\}\{ty\}\Big)^n\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{19}$$

第三步把后两个积分化成与第一个相同的形状. 已知

$$G_n(1)=\int_0^1\int_0^1u^n\Big\{\frac{1}{t}\Big\}^n\Big\{\frac{t}{u}\Big\}^n\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t,$$

断言 (19) 右端三项都等于 $\dfrac{G_n(1)}{3}$：第一项即定义；第二个积分作代换 $uy=w$：

$$\int_0^1\int_0^{1/y}y^{n+1}\Big(\{u\}\Big\{\frac{1}{uy}\Big\}\Big)^n\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^1y^n\Big\{\frac{w}{y}\Big\}^n\Big\{\frac{1}{w}\Big\}^n\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}y;$$

第三个积分作代换 $ty=z$：

$$\int_0^1\int_0^{1/y}y\Big(\Big\{\frac{1}{y}\Big\}\Big\{\frac{1}{t}\Big\}\{ty\}\Big)^n\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^1z^n\Big\{\frac{1}{y}\Big\}^n\Big\{\frac{y}{z}\Big\}^n\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y.$$

把上面两式代回 (19)，交换积分次序并统一改记哑变量为 (t,u)（第二个积分把 w 记作 t、y 记作 u；第三个把 y 记作 t、z 记作 u），三个 $\dfrac{1}{3}$ 相加为 1，于是

$$\mathscr{I}_n=G_n(1).$$

第四步按 $u\lessgtr t$ 把正方形积分区域沿对角线拆成两部分：

$$\mathscr{I}_n=\int_0^1\int_0^t u^n\Big\{\frac{1}{t}\Big\}^n\Big\{\frac{t}{u}\Big\}^n\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t+\int_0^1(1-t)\,t^n\Big\{\frac{1}{t}\Big\}^n\,\mathrm{d}t,$$

后一积分中 $\dfrac{t}{u}\leqslant1$，$\{t/u\}=t/u$，被积函数与 u 无关，对 u 积分得因子 $1-t$. 第二个积分就是 $I_{n,n}-I_{n+1,n}$；

第一个积分作代换 $u=ts$（$\mathrm{d}u=t\,\mathrm{d}s$，$s\in(0,1)$，此时 $\dfrac{t}{u}=\dfrac{1}{s}$），区域成为矩形 $[0,1]^2$，且被积函数分解为只含 t 与只含 s 的两部分之积：

$$\int_0^1\int_0^t u^n\Big\{\frac{1}{t}\Big\}^n\Big\{\frac{t}{u}\Big\}^n\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t=\int_0^1\int_0^1t^{n+1}\Big\{\frac{1}{t}\Big\}^n s^n\Big\{\frac{1}{s}\Big\}^n\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=I_{n+1,n}\,I_{n,n},$$

于是

$$\mathscr{I}_n=I_{n+1,n}\,I_{n,n}+I_{n,n}-I_{n+1,n}=I_{n,n}\big(1+I_{n+1,n}\big)-I_{n+1,n}.\tag{20}$$

剩下的是把第二节的结果代入. 由 (6)，$I_{n,n}=1-\dfrac{S}{n+1}$，其中 $S\coloneqq\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\zeta(i+1)$. 由 (12) 取 $p=n+1$、$q=n$，

$$I_{n+1,n}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(1-\sum_{j=1}^{n}(n+2-j)\big(\zeta(n+3-j)-1\big)\right),$$

作换元 $i=n+2-j$（i 跑遍 $2,\dots,n+1$），并记 $T\coloneqq\sum_{i=2}^{n+1} i\,\zeta(i+1)=\sum_{i=1}^{n}(i+1)\zeta(i+2)$，于是

$$I_{n+1,n}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\sum_{i=2}^{n+1} i\,\zeta(i+1)\right)=\frac{1}{2}-\frac{T}{(n+1)(n+2)},\tag{21}$$

代入 (20)：

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_n&=\left(1-\frac{S}{n+1}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{T}{(n+1)(n+2)}\right)-\frac{1}{2}+\frac{T}{(n+1)(n+2)}\\&=\frac{3}{2}-\cancel{\frac{T}{(n+1)(n+2)}}-\frac{3S}{2\,(n+1)}+\frac{ST}{(n+1)^2\,(n+2)}-\frac{1}{2}+\cancel{\frac{T}{(n+1)(n+2)}}\\&=1-\frac{3S}{2(n+1)}+\frac{ST}{(n+1)^2(n+2)},\end{aligned}$$

这就得到

$$\boxed{\mathscr{I}_n=1-\frac{3}{2(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\zeta(i+1)+\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}\left(\sum_{i=1}^{n}\zeta(i+1)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(i+1)\zeta(i+2)\right)}$$

取 $n=2$ 时，(20) 恰为上一节的 (17)；代入与上一节相同的 $I_{2,2}$、$I_{3,2}$ 即还原 (18)，这是一次很好的印证.

再举 $n=1$ 的结果：

$$\mathscr{I}_1=1-\frac{3}{4}\zeta(2)+\frac{1}{6}\zeta(2)\zeta(3)\approx 0.0958501749.$$

随着 n 增大，积分值迅速缩小，这与被积函数逐点不超过 1 且在大部分区域上很小的直观相符.

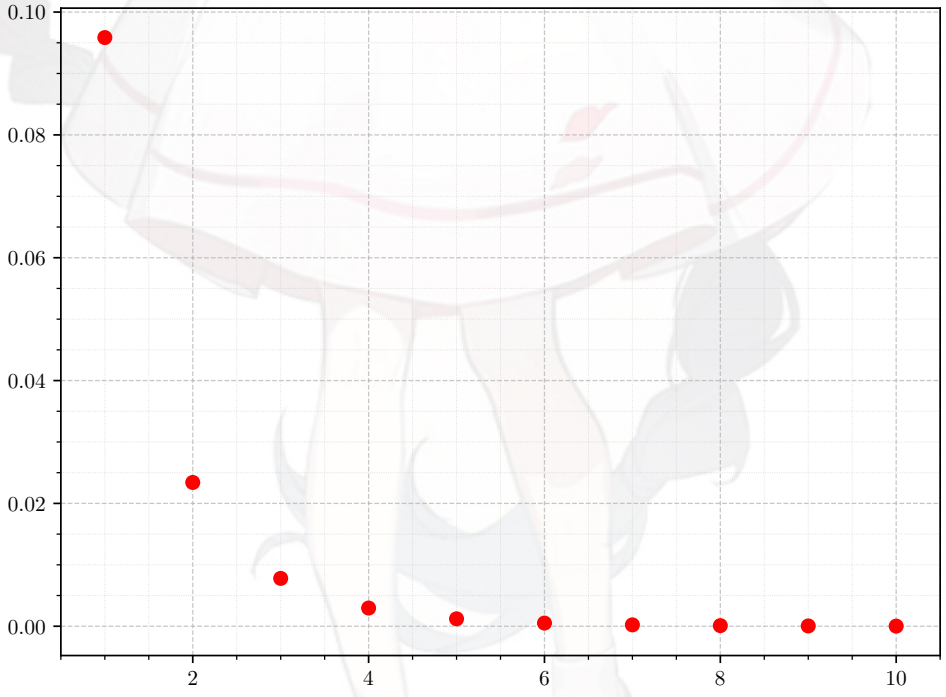


图 2: $\mathscr{I}_n$ 关于 n 的散点图